Informatica e Comunicazione Digitale

Fondamenti di Informatica

Prof.ssa E. Gentile

a.a. 2011-2012

Cosa è l'informazione

- L'informazione è qualcosa che si possiede e si può dare ad un altro senza perderne il possesso.

Informazione

- L'Informazione non attesa non può essere ricevuta
- Essa richiede una incertezza da parte di colui che la riceve
- Non deve essere Ambigua.

A cosa serve

Per risolvere una incertezza

Per prendere decisioni

Per risolvere problemi

Condizioni necessarie

- Sorgente e Ricevente hanno un codice in comune
- L’incertezza del Ricevente è tra un numero ben definito di possibilità

Messaggio

- Il Sorgente [S] produce un Messaggio [M]
- Il Messaggio modifica lo stato del Ricevente [R]

Definizione di *Informazione*

- **Livello semantico:** il significato
- **Livello sintattico:** la forma o struttura
- **Livello pragmatico:** reazione del ricevente

Struttura dell'informazione

- La struttura delle informazioni influisce sui tempi di accesso alle informazioni stesse
- La struttura delle informazioni nasconde l'informazione rispetto ad accessi diversi da quelli per cui la struttura è stata creata

Codice

- Numero o sigla alfanumerica sostituente, allo scopo di facilitare il trattamento delle informazioni, la descrizione di cose, persone e situazioni.

  (*Voc. Zanichelli*)

- In senso informatico è una regola per far corrispondere dei nomi (i dati) a degli oggetti (le informazioni)

Definizione di Shannon

- L'informazione è tutto ciò che può consentire di ridurre il nostro grado di incertezza su un evento che si può verificare

Prof.ssa E. Gentile — Fondamenti di Informatica — 10

Processo comunicativo

- È composto da cinque parti:
  - Un **mittente**: che produce un messaggio da comunicare ad un'altra entità
  - Un **trasmettitore**: che codifica il messaggio in modo che possa viaggiare su un canale di comunicazione
  - Un **canale di comunicazione**
  - Un **ricevitore**: che riceve ciò che viaggia sul canale e lo decodifica per riconoscere il messaggio
  - Un **destinatario**: al quale giunge un messaggio

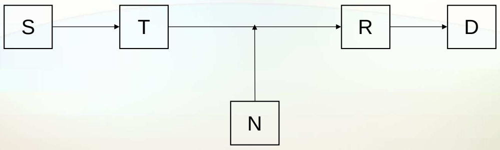
Prof.ssa E. Gentile — Fondamenti di Informatica — 11

Ipotesi di Shannon

- La trasmissione dei simboli lungo il canale costituisce un fenomeno discreto
  - Ovvero, l'invio di ciascun simbolo richiede una certa quantità di tempo, finita e non nulla
- Esiste una sorgente di rumore
  - Agisce sul canale modificando il contenuto sintattico dell'informazione, la sua forma

Prof.ssa E. Gentile — Fondamenti di Informatica — 12

Processo comunicativo di Shannon



S = Sorgente; T = Trasmettitore; R = Ricevitore;
D = Destinatario; N = Sorgente di Rumore

Problemi da affrontare

- Come misurare la quantità di informazione che viaggia lungo il canale
- Come garantire trasmissioni sicure
- Come garantire trasmissioni affidabili

Definizione di Entropia

- L'entropia è la misura del disordine di un sistema
- Più ordinato o strutturato è un sistema minore è l'entropia e viceversa

Informazione

- Il BIT è la quantità di Informazione che risolve un'incertezza Binaria 0 – 1
- X = {x_1, …, x_n} insieme di caratteri che può essere trasmesso
- P(x_i) la probabilità che x_i sia trasmesso

$$\mathrm{I}(x_i) = \log_2 \frac{1}{\mathrm{P}(x_i)}$$

Concetto di Incertezza

- Più grande è la nostra incertezza su ciò che dovrà contenere un messaggio, e maggiore sarà l'informazione che riceveremo quando il messaggio sarà arrivato

Misura dell'informazione

- È dunque logico fondare la misura dell'informazione associata ad un messaggio sulla **probabilità** che il messaggio stesso si verifichi

Sistema discreto

- Supponiamo che il sorgente emette simboli discreti, ciascuno dei quali si suppone abbia la stessa durata degli altri
- Uno dei modi più semplici di specificare l'informazione contenuta in un simbolo discreto consiste nel prendere il logaritmo, cambiato di segno, della probabilità che tale simbolo venga emesso.

Misura dell'informazione

$$H = -\log P$$

- H indica la misura dell'informazione
- P è la probabilità del simbolo
- Il logaritmo è in una base che determina l'unità di misura dell'informazione

$$H = -\log_2 P \quad bit$$

Informazione media di più simboli

- Si consideri una sorgente avente i tre simboli A, B e C, che vengono emessi con probabilità P(A), P(B) e P(C)
- L'informazione associata ad A è:

$$H(A) = -\log_2 P(a) \quad bit$$

per A che viene emesso per circa P(a)-esimi di tempo

Entropia della sorgente

- Per una sorgente *x*, con m simboli, se l'i-esimo simbolo ha una probabilità *P(i)*

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{m} P(i)\log P(i) \quad bit/secondo$$

H prende il nome di

entropia della sorgente

Proprietà uno

- Se tutte le *P(i)*, una sola esclusa, sono nulle, allora *H(x)=0*

non essendovi incertezza sul risultato, non v'è neppure informazione

Proprietà due

- Se tutte le *P(i)* sono uguali $\left(P(i) = \frac{1}{m}\right)$

allora *H(x)* è massima:

$$H(x) = -\sum_{1=1}^{m} \frac{1}{m}\log\frac{1}{m} = \log m$$

Proprietà tre

- Siano in gioco due simboli, x e y, con m possibilità per x e n per y
- Se P(i,j) è la probabilità congiunta dell'emissione dell'i-esimo simbolo di x e dell'j-esimo simbolo di y, allora l'entropia della sorgente doppia è definita da:

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i,j)\log P(i,j)$$

Indipendenza dei simboli

- La relazione precedente include le sorgenti discrete in cui i simboli non sono indipendenti
- Esiste una effettiva interdipendenza fra i simboli la cui influenza può essere introdotta nell'entropia

Interdipendenza

- Siano *x* e *y* due gruppi di simboli come nella proprietà 3
- Per ogni valore *i* che *x* può assumere esiste una probabilità condizionale *P(i|j)* che *y* valga *j*

Entropia Condizionale

- L'entropia condizionale di y sotto la condizione che lo preceda x è:

$$H(y\,|\,x) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i,j)\log P(j\,|\,i)$$

Probabilità congiunte

- Le probabilità congiunte sono legate a quelle condizionali dalla relazione:

$$P(i,j) = P(i)P(j\,|\,i)$$

- Sostituendo questa relazione in quella definita nella proprietà 3 si ha:

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i)P(j\,|\,i)\log P(i)P(j\,|\,i)$$

ossia…

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i)P(j\,|\,i)\log P(i) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i,j)\log P(j\,|\,i)$$

Se i è costante:

$$\sum_{j=1} P(i)P(j\,|\,i)\log P(i) = P(i)\log P(i)$$

e quindi:

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{m} P(i)\log P(i) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(i,j)\log P(j\,|\,i)$$

Entropia Congiunta

- Il primo termine non è altro che *H(x)*, mentre il secondo termine è *H(y|x)*

$$H(x,y) = H(x) + H(y \mid x)$$

- Se i simboli sono indipendenti allora:

$$H(x,y) = H(x) + H(y)$$

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 31

Entropia Congiunta

- Se due sorgenti producono una successione di simboli che non hanno relazioni o legami fra loro, allora l'entropia congiunta di una coppia di simboli qualsiasi è data dalla somma delle entropie relative ai due simboli

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 32

Esempio 1

- Si consideri il lancio di una moneta
- Sia all'uscita testa che croce è associata una informazione pari a: $-\log \frac{1}{2} = 1 bit$
- L'informazione media o entropia è:

$$H = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1 bit/simbolo$$

Prof.ssa E. Gentile Fondamenti di Informatica 33

Esempio 2

- Consideriamo una sorgente con 6 simboli A, B, C, D, E, F le cui probabilità sono:

$$P(A)=1/2$$
$$P(B)=1/4$$
$$P(C)=1/8$$
$$P(D)=1/16$$
$$P(E)=1/32$$
$$P(F)=1/32$$

L’informazione media

$$H=-\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}+ \\ \frac{1}{16}\log\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\log\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\log\frac{1}{32} \end{pmatrix}=1\tfrac{15}{16}\ \frac{bit}{simbolo}$$

Entropia in bit al secondo

- L’entropia espressa in bit per simbolo è indicata con *H*
- L’entropia misura in bit/secondo è indicata con *H’*
- Se *s* è il tasso di invio dei simboli (numero di bit trasmessi in un secondo) allora: *H’=sH*

Esempio 3

P(i)

i	P(i)
A	9/27
B	16/27
C	2/27

P(j|i)

i|i	A	B	C
A	0	4/5	1/5
B	1/2	1/2	0
C	1/2	2/5	1/10

P(i,j)=P(i)P(j|i)

i|i	A	B	C
A	0	4/15	1/15
B	8/27	8/27	0
C	1/27	4/135	1/135

Ridondanza

- È evide te che la pres nza di una interd pendenza fra i simboli dimi uisce l'entropia della sorge te rispetto ad una che ab ia simboli tutti indip ndenti.
- Una successione di simboli che dipendono gli uni dagli altri si dice **ridondante**
- Misuriamo la ridondanza di una successione di simboli calcolando di quanto è stata ridotta l'entropia
- La ridondanza è quindi definita come:

$$E = 1 - \frac{H(y|x)}{H(x)}$$

Canale discreto

- La capacità di trasmettere informazioni in un canale discreto si può misurare mediante il numero di bit per unità di tempo che possono venire trasmessi
- La capacità è quindi:

$$C = \lim_{T \to \infty} \frac{\log N(T)}{T}$$

Teorema

- Siano *H* (bit/simbolo) e *C* (bit/secondo), rispettivamente, l'entropia di una sorgente e la capacità di un canale senza rumore;
- È possibile codificare i simboli emessi dalla sorgente in modo di trasmettere in media:

  $(C/H)-\varepsilon$ simboli al secondo
- ove ε è un numero positivo arbitrario ($<C/H$).
- Non è possibile trasmettere con velocità superiore a C/H simboli al secondo.

Esempio

- Poniamo a 120 persone la domanda:
  - Sei destro o mancino?
- La risposta sarà D=Destro o M=Mancino e sono equiprobabili e indipendenti:
- Supponiamo che la risposta sia trasmessa nell'ordine giusto in cui è data:
  - DDDMDDMDMDDDMD…
- Non ci basta sapere quanti sono D e quanti M

Efficienza di codificazione

- Se diciamo efficienza di codificazione il rapporto fra entropia del messaggio originale e la capacità di canale richiesta, risulta che nell'esempio:

$$\eta_c = \frac{0{,}2864}{0{,}35} \times 100\% = 84{,}6\%$$

Canali discreti con rumore

- Consideriamo ora il caso in cui la trasmissione non è perfetta a causa della presenza di rumore nel canale.
- Supponiamo che il disturbo su un simbolo sia indipendente dai simboli precedenti e successivi.

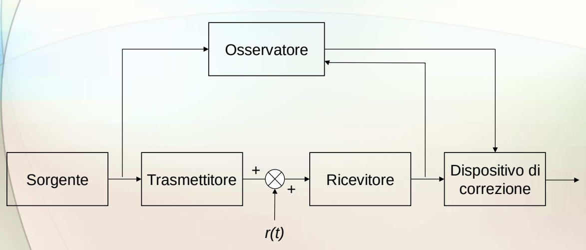
Entropie

- $H(x)$ = entropia della sorgente o d'ingresso del canale
- $H(y)$ = entropia del ricevente o d'uscita del canale
- $H(y/x)$ = entropia dell'uscita, nota l'entrata
- $H(x/y)$ = entropia dell'entrata, nota l'uscita
- $H(x,y)$ = entropia congiunta dell'ingresso e dell'uscita

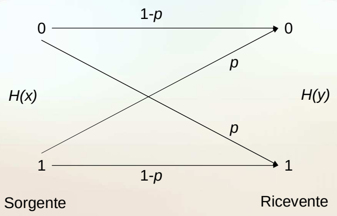
- Relazioni

$$H(x,y) = H(x) + H(y/x)$$
$$H(x,y) = H(y) + H(x/y)$$

Sistema ideale di comunicazioni



Canale binario simmetrico



L'informazione

$$P(nessunerrore) = P(0) = P(è1)P\left(1/_1\right) + P(è0)P\left(0/_0\right)$$

- Ossia: $P(0) = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1-p$
- La probabilità che l'osservatore invii un 1 è:

$$P(errore) = P(1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = p$$

- L'entropia del segnale è:

$$-p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

Tasso di trasmissione del canale

$$\tau = H'(x) - H'(x/y)bit/\sec$$

- *H(x/y)* viene detto *equivocazione* e rappresenta l'informazione perduta per la presenza di rumore nel canale

Capacità di un canale discreto senza rumore

$$C = \max\{H'(x) - H'(x/y)\}\,bit/\sec$$